2.1. Волновой пакет

Волны де Бройля, связанные с движением частиц, не могут быть истолкованы классически. Были попытки рассматривать частицы как образования из волн, локализованных в некоторой области пространства. (Так, Шрёдингер рассматривал электрон не как частицу, но как некоторое распределение плотности в пространстве, которое определялось квадратом его волновой функции $|\psi|^2$). Пример такого образования – *волновой пакет*, наложение монохроматических волн с близкими частотами, распространяющихся примерно в одном направлении. Оказалось, что скорость распространения центра пакета (групповая скорость (7)) равна механической скорости частицы, представленной этим волновым пакетом.

Однако составляющие волновой пакет волны с различными частотами движутся даже в пустоте с разной скоростью, так как скорость волны зависит от её частоты. Так что, со временем пакет будет расплываться, и построенная таким образом частица оказывается неустойчивой.

Предположение де Бройля о том, что с любой свободной частицей связана плоская волна с определённой частотой ω и волновым вектором $\vec{k}$ (причём, эти параметры определяются энергией и импульсом частицы), позволяет записать выражение для этой волны, при учёте соотношений (1) и (2) $E = \hbar\omega$, $\vec{p} = \hbar\vec{k}$:

$$\psi(\vec{r},t) = Ce^{i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)} = Ce^{i\left(\frac{E}{\hbar}t - \frac{1}{\hbar}\vec{p}\vec{r}\right)} = Ce^{\frac{i}{\hbar}\left(Et - \vec{p}\vec{r}\right)}. \tag{9}$$

Волновая функция вида (9) называется *волной де Бройля*. C в (9) – амплитуда волны, $\alpha = \frac{1}{\hbar}\left(Et - \vec{p}\vec{r}\right)$ – фаза волны. Волна (9) плоская, *однородная* (направление распространения одинаково во всех точках пространства), *монохроматическая* (строго определённой постоянной частоты), незатухающая (k вещественно), занимает всё бесконечное пространство и является идеализацией. Группа волн с близкими частотами и направлениями распространения может быть получена наложением плоских волн вида (9), для простоты выберем ось x совпадающей с направлением распространения волны: $\vec{k} \uparrow\uparrow \vec{r} \Rightarrow \vec{p} \uparrow\uparrow \vec{r} \uparrow\uparrow OX$ $\Rightarrow \vec{p}\vec{r} = p_x x = px$.

Используя последнее соотношение в (9), получаем $\psi(x,t) = Ce^{\frac{i}{\hbar}(Et - px)}$, или

$$\psi(x,t) = Ce^{i(\omega t - kx)}. \tag{9'}$$

Тогда волновой пакет описывается функцией

$$\psi = \int\limits_{p-\frac{\Delta p}{2}}^{p+\frac{\Delta p}{2}} A(p')e^{-\frac{i}{\hbar}(E't - p'x)}\mathrm{d}p', \ \Delta p \text{ мало.} \tag{10}$$

Амплитуды отдельных волн в пакете:

$$A(p')=\begin{cases}0, & p'<p-\dfrac{\Delta p}{2},\\ \dfrac{A}{\Delta p}, & p-\dfrac{\Delta p}{2}\le p'\le p+\dfrac{\Delta p}{2},\\ 0, & p'>p+\dfrac{\Delta p}{2}.\end{cases} \qquad (11)$$

Энергия E' связана с импульсом p' частицы релятивистской формулой $E'=c\sqrt{p'^2+mc^2}$. Если разложить E' в ряд по отклонениям импульса p' от фиксированного значения p с точностью до линейных слагаемых, то можно вычислить приближённо интеграл (10). Квадратичная (отбрасываемая) часть разложения, равная $\frac{1}{2}(p'-p)^2\left(\frac{\partial^2 E(p')}{\partial(p')^2}\right)_{p'=p}$, позволяет найти время «расползания» волнового пакета (т. е. он уже не локализован в малой области пространства, соответствующей частице), без вывода:

$$\Delta t=\frac{(\Delta x)^2 m}{h}. \qquad (12)$$

Для примера найдём время расползания для частицы с массой $m=1\text{г}$ и неопределённостью измерения её линейных размеров $\Delta x\approx 0{,}1\text{см}$:

$$\Delta t=\frac{10^{-2}\,\text{см}^2\cdot 1\,\text{г}}{6{,}63\cdot 10^{-27}\,\text{эрг}\cdot\text{с}}=\frac{10^{25}}{6{,}63}\frac{\text{г}\cdot\text{см}^2}{(\text{г}\cdot\text{см}^2/\text{с}^2)\cdot\text{с}}\approx 1{,}5\cdot 10^{24}\,\text{с}.$$

Переведём секунды в часы (в одном часе 3600 секунд): $\Delta t\approx\frac{1{,}5}{3600}\cdot 10^{24}\,\text{ч}\approx 4\cdot 10^{20}\,\text{ч}$, или $\Delta t\approx 4{,}8\cdot 10^{16}$ лет.

Но стоит от макрочастицы перейти к микрочастице, например, электрону с массой $m_e\sim 10^{-27}$ г и неопределённостью измерения $\Delta x\sim 10^{-13}$ см, как сразу время расплывания становится очень малым:

$$\Delta t=\frac{10^{-26}\cdot 10^{-27}}{6{,}63\cdot 10^{-27}}\,\text{с}\approx 1{,}5\cdot 10^{-27}\,\text{с},$$

т. е. волновой пакет, отождествляемый с частицей, практически мгновенно расплывается, что не согласуется с экспериментом.

Таким образом, частица не может представлять собой образования из волн с плотностью $\psi^*\psi$ «размазывания» в пространстве.