2.3. Принцип суперпозиции

Этот принцип хорошо известен для электромагнитных волн. Если накладываются две электромагнитные волны, то напряжённость электрического и магнитного полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в любой точке пространства равна сумме напряжённостей: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ и $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$. Для волн де Бройля справедлив аналогичный принцип.

Принцип суперпозиции: если для физической системы возможно состояние с волновой функцией $\psi_1(\vec{r}, t)$ и состояние с волновой функцией $\psi_2(\vec{r}, t)$, то может реализоваться состояние с волновой функцией $\psi = \alpha\psi_1 + \beta\psi_2$ где α и β – любые комплексные или действительные числа, на которые накладывается условие нормировки функции ψ.

Для того чтобы понять, какое следствие для распределения вероятностей имеет этот принцип, рассмотрим интерференционный опыт с электронами. Поток электронов падает на решётку и далее, проходя через две щели, – на экран (рис. 2):

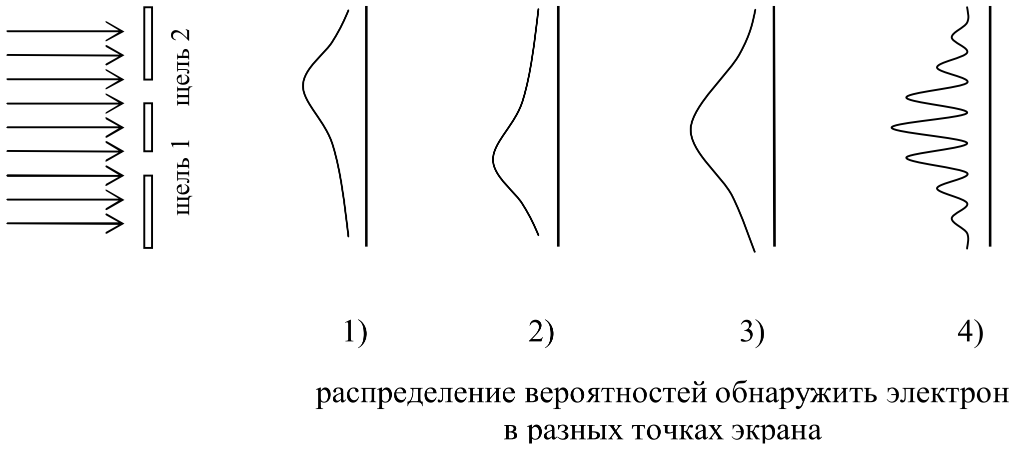

Рис. 2 – Интерференционный опыт с электронами

На рисунке изображены четыре возможных варианта распределения вероятностей обнаружить электрон в разных точках экрана:

1) открыта первая щель, соответствующая волновая функция – ψ_1;

2) открыта вторая щель, волновая функция в этом случае – ψ_2;

3) открыты две щели, интерференции нет. Этот случай соответствует сложению вероятностей из 1) и 2) в классической картине, однако экспериментальной картине соответствует следующий вариант;

4) если от амплитуд вероятностей перейти к самим вероятностям, то из $\psi = \psi_1 + \psi_2$ следует $|\psi|^2 = |\psi_1 + \psi_2|^2 = \left(\psi^*{}_1 + \psi^*{}_2\right)\left(\psi_1 + \psi_2\right) =$

$$= \psi^*{}_1\psi_1 + \psi^*{}_2\psi_1 + \psi^*{}_1\psi_2 + \psi^*{}_2\psi_2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \psi^*{}_2\psi_1 + \psi^*{}_1\psi_2 .$$

Здесь $|\psi_1|^2$ – плотность вероятности распределения, обусловленная первой щелью, $|\psi_2|^2$ – второй, $\psi^*{}_2\psi_1 + \psi^*{}_1\psi_2$ – перекрёстный, интерференционный член. Это слагаемое показывает, что, в отличие от классических частиц, которые могут пролететь только через одну щель, электроны «чувствуют» влияние обеих открытых щелей, т. е., как бы, каждый электрон проходит одновременно через обе щели, поскольку интерференционная картина сохраняется и в том случае, когда через щели проходит только один электрон.

Принцип суперпозиции может включать любое количество состояний: если мы имеем n состояний (отличающихся друг от друга значением какой-либо величины), которые изображаются волновыми функциями $\psi_1, \ldots, \psi_n$, то существует сложное состояние

$$\psi = c_1\psi_1 + \ldots + c_n\psi_n \, , \tag{18}$$

где $c_1 \ldots c_n$ – произвольные комплексные амплитуды.

Если состояния отличаются друг от друга бесконечно мало, то вместо суммы в суперпозиции (18) будет присутствовать интеграл. Так, любую волновую функцию $\psi(\vec{r},t)$ можно представить в виде суперпозиции бесконечного числа плоских волн де Бройля

$$\psi_p(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\vec{r})} \tag{19}$$

(перед показателем экспоненты могут быть выбраны знаки как плюс, так и минус), множитель $\dfrac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$ введён из соображений нормировки. Т. о.

$$\psi(\vec{r},t) = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} c\left(p_x, p_y, p_z, t\right) \psi_p(\vec{r},t) \, \mathrm{d}p_x \mathrm{d}p_y \mathrm{d}p_z \, , \tag{20}$$

где $c(\vec{p},t) = c\left(p_x, p_y, p_z, t\right)$ – амплитуда волны де Бройля, имеющей импульс $\vec{p}$.

Выражение (20) представляет собой разложение функции $\psi(x,y,z,t)$ в тройной интеграл Фурье.