3.2. Линейные операторы

<u>*Линейным оператором*</u> $\hat{A}$ в пространстве векторов состояний называют правило, сопоставляющее каждому вектору состояния $|\psi\rangle$ некоторый другой вектор состояния $\hat{A}|\psi\rangle$ таким образом, что выполняется условие

$$\hat{A}\left(a|\psi\rangle + b|\varphi\rangle\right) = a\hat{A}|\psi\rangle + b\hat{A}|\varphi\rangle. \qquad (27)$$

<u>Примеры операторов:</u> $\hat{x} = x$, $\dfrac{\partial}{\partial x}$ – оператор дифференцирования по x.

Оператор координаты совпадает с умножением на координату (т. е. $\hat{x}\xi = x\xi$) в координатном представлении, в котором мы и будем работать (в импульсном представлении – наоборот, оператор импульса сводится к умножению на импульс, а оператор координаты выражается оператором дифференцирования). В основном, все операторы в квантовой механике комбинируются из этих двух операторов – координаты и импульса.

3.2.1. Алгебра операторов

1) определена сумма операторов, $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$, если действие оператора $\hat{C}$ на $|\psi\rangle$ (для $\forall|\psi\rangle \subset \mathscr{L}$), $\hat{C}|\psi\rangle$, эквивалентно действию $\hat{A}|\psi\rangle + \hat{B}|\psi\rangle$;

2) определено умножение оператора на число, $\hat{C} = \alpha\hat{A}$, если $\hat{C}|\psi\rangle = \alpha\hat{A}|\psi\rangle$;

3) произведение операторов, $\hat{C} = \hat{A}\hat{B}$, если $\hat{C}|\psi\rangle = \hat{A}\hat{B}|\psi\rangle = \hat{A}\left(\hat{B}|\psi\rangle\right)$ – вначале $\hat{B}$ действует на $|\psi\rangle$, а на получившийся вектор действует $\hat{A}$. В общем случае операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ не коммутируют, $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$.

<u>Пример</u> действия произведения операторов: $\hat{A} = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $\hat{B} = x$;

$$\hat{A}\hat{B}\,\psi(x) = \frac{\partial}{\partial x}x\,\psi(x) = \psi(x) + x\frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad \hat{B}\hat{A}\,\psi(x) = x\frac{\partial}{\partial x}\psi(x) = x\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Результаты действия произведения оператором в прямом и обратном порядке не совпадают.

Если $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$, то операторы называются <u>*коммутирующими*</u>.

$\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \equiv \left[\hat{A},\hat{B}\right]_- = \left[\hat{A},\hat{B}\right]$ называют <u>*коммутатором*</u> операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$.

Значок минус справа от скобки обычно опускают.

Величина $\left[\hat{A},\hat{B}\right]_+ = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ называется <u>*антикоммутатором*</u>.

Если операторы антикоммутируют, то $\hat{A}\hat{B} = -\hat{B}\hat{A}$.