### 3.2.2. Функции операторов

Функция оператора $f\left(\hat{A}\right)$ определяется с помощью разложения соответствующей функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x=0$: $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\partial^{(n)}f(x)}{\partial x^n}\Big|_{x=0}\cdot x^n$. Аналогично

$$f\left(\hat{A}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\partial^{(n)}f(x)}{\partial x^n}\Big|_{x=0}\cdot\hat{A}^n, \tag{28}$$

где $\hat{A}^n$ – $n$ раз действующий на произвольную функцию оператор $\hat{A}$.

Пример. Запишем разложение $\cos\hat{A}$. Сначала найдём разложение $\cos x$ в ряд Тейлора: для этого вычислим

$$\cos x\big|_{x=0}=\cos 0=1;$$

$$\cos' x=-\sin x,\quad \cos' x\big|_{x=0}=0;$$

$$\cos'' x=-\cos x,\quad \cos'' x\big|_{x=0}=-1;$$

$$\cos''' x=\sin x,\quad \cos''' x\big|_{x=0}=0;$$

$$\cos^{\mathrm{IV}} x=\cos x,\quad \cos^{\mathrm{IV}} x\big|_{x=0}=1;$$

$$\ldots\quad\Rightarrow$$

$$\cos^{(n)}x\big|_{x=0}=\begin{cases}0, & n \text{ нечётное}\\ (-1)^{n/2}, & n \text{ чётное}\end{cases}.$$

Обозначим $m\equiv n/2$, тогда $\cos^{(2m)}x\big|_{x=0}=(-1)^m$ и разложение $\cos x$ в ряд Тейлора есть

$$\cos x=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$$ Теперь можем записать

$$\cos\hat{A}=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\hat{A}^{2m}}{(2m)!}=1-\frac{\hat{A}^2}{2!}+\frac{\hat{A}^4}{4!}-\frac{\hat{A}^6}{6!}+\ldots$$

### 3.2.3. Обратные операторы

$\hat{A}^{-1}$, обратный к оператору $\hat{A}$, определяется из соотношения $\hat{A}^{-1}\hat{A}=$ $=\hat{A}\hat{A}^{-1}=1$, при этом единичный оператор не меняет функцию: $\hat{1}\psi=\psi$.

Свойства (свойства 1 и 2 доказать самостоятельно)

1. $\hat{A}$ и $\hat{A}^{-1}$ взаимно обратны, т. е. $\left(\hat{A}^{-1}\right)^{-1}=\hat{A}$.

2. Оператор и обратный к нему коммутируют: $\left[\hat{A},\hat{A}^{-1}\right]=0$.

$$\hat{A}\hat{A}^{-1}\psi-\hat{A}^{-1}\hat{A}\psi=0. \tag{29}$$

Пусть $\hat{A}\psi=\varphi$, тогда $\hat{A}^{-1}\varphi=\psi$ в силу (29).

3. Обратный оператор не существует, если соответствие неоднозначно: $\hat{A}\psi_1=\varphi$, $\hat{A}\psi_2=\varphi$. Неясно, что должно было бы получаться при действии оператора $\hat{A}^{-1}$ на $\varphi$ – $\psi_1$ или $\psi_2$: $\hat{A}^{-1}\varphi=?$

Пример: оператор дифференцирования $\dfrac{\partial}{\partial x}$ не имеет обратного, поскольку операция интегрирования включает неопределённую константу.

4. $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^{-1} = \hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1}$.

Доказательство. Рассмотрим определение обратного оператора для произведения $\left(\hat{A}\hat{B}\right)$: $\hat{1} = \left(\hat{A}\hat{B}\right)^{-1}\left(\hat{A}\hat{B}\right)$. Допустим, что свойство 4 справедливо, тогда $\hat{1} = \hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1}\left(\hat{A}\hat{B}\right)$, или $\hat{1} = \hat{B}^{-1}\hat{A}^{-1}\hat{A}\hat{B} = \hat{B}^{-1}\left(\hat{A}^{-1}\hat{A}\right)\hat{B}$. Ввиду того, что $\hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{1}$, остаётся очевидное равенство $\hat{1} = \hat{B}^{-1}\hat{B}$. Доказано.

Для произведения $n$ операторов справедливо:

$\left(\hat{A}_1\hat{A}_2\ldots\hat{A}_{n-1}\hat{A}_n\right)^{-1} = \hat{A}_n{}^{-1}\hat{A}_{n-1}{}^{-1}\ldots\hat{A}_2{}^{-1}\hat{A}_1{}^{-1}$.

Доказать самостоятельно Оператор в отрицательной степени определяется аналогично оператору в положительной степени: $\hat{A}^{-n} = \underbrace{\hat{A}^{-1}\ldots\hat{A}^{-1}}_{n}$.