3.2.4. Эрмитово сопряжение

Для любого оператора $\hat{A}$, действующего в пространстве состояний, определим оператор $\hat{A}^+$, называемый <u>*эрмитово сопряжённым*</u> оператором для оператора $\hat{A}$, с помощью формулы

$$\langle\varphi|\hat{A}^+|\psi\rangle=\overline{\langle\psi|\hat{A}|\varphi\rangle}\ \left(\text{или}\ \langle\varphi|\hat{A}^+|\psi\rangle=\langle\psi|\hat{A}|\varphi\rangle^*\right). \tag{30}$$

Оператор $\hat{A}$ называют <u>*эрмитовым*</u>, если

$$\hat{A}=\hat{A}^+. \tag{31}$$

Оператор называют <u>*унитарным*</u>, если

$$\hat{A}^+\hat{A}=\hat{1}\ \text{ и }\ \hat{A}\hat{A}^+=\hat{1}. \tag{32}$$

Можно провести следующие аналогии между операторами и числами: эрмитов оператор – аналогичен вещественному числу, унитарный оператор – аналогичен комплексному числу с модулем, равным единице.

Определим эрмитово сопряжённый вектор (бра-вектор) для вектора состояния $|\psi\rangle$ (кет-вектора):

$$\langle\psi|=\left(|\psi\rangle\right)^+. \tag{33}$$

Справедливы соотношения:

1. $$\left(c\hat{A}\right)^+=c^*\hat{A}^+. \tag{34}$$

<u>Доказательство</u>. $\langle\varphi|\left(c\hat{A}\right)^+|\psi\rangle\overset{(30)}{=}\overline{\langle\psi|c\hat{A}|\varphi\rangle}$. Из свойства 1) скалярного произведения (п.3.1.2) $\overline{c\langle\psi|\hat{A}|\varphi\rangle}=c^*\overline{\langle\psi|\hat{A}|\varphi\rangle}\overset{(30)}{=}c^*\langle\varphi|\hat{A}^+|\psi\rangle\ =\langle\varphi|c^*\hat{A}^+|\psi\rangle\ \Rightarrow$ $\left(c\hat{A}\right)^+=c^*\hat{A}^+$.

2. $$\left(\hat{A}\hat{B}\right)^+=\hat{B}^+\hat{A}^+. \tag{35}$$

<u>Доказательство</u>. $\langle\varphi|\left(\hat{A}\hat{B}\right)^+|\psi\rangle\overset{(30)}{=}\overline{\langle\psi|\hat{A}\hat{B}|\varphi\rangle}\overset{|\hat{B}\varphi\rangle\equiv\xi}{=}\overline{\langle\psi|\hat{A}|\xi\rangle}\overset{(30)}{=}\langle\xi|\hat{A}^+|\psi\rangle$ $\overset{|\hat{A}^+\psi\rangle\equiv\eta}{=}\langle\xi|\eta\rangle=\overline{\langle\eta|\xi\rangle}==\overline{\langle\eta|\hat{B}\varphi\rangle}=\langle\varphi|\hat{B}^+|\eta\rangle=\langle\varphi|\hat{B}^+\hat{A}^+|\psi\rangle\Rightarrow\left(\hat{A}\hat{B}\right)^+=\hat{B}^+\hat{A}^+$.

3. $$\left(c|\psi\rangle\right)^+=c^*\langle\psi|. \tag{36}$$

<u>Доказательство</u>. $|c\psi\rangle^+=\langle c\psi|$ по определению эрмитова сопряжения вектора. По свойству 2) скалярного произведения, множитель из бра-вектора выносится комплексно сопряжённым: если $\langle c\psi|\varphi\rangle=c^*\langle\psi|\varphi\rangle$, то $\langle c\psi|=c^*\langle\psi|$.

4. $$\left(\hat{A}|\psi\rangle\right)^+=\langle\psi|\hat{A}^+. \tag{37}$$

<u>Доказательство</u>. Обозначим $\hat{A}|\psi\rangle\equiv|\varphi\rangle$. Тогда $|\varphi\rangle^+=\langle\varphi|$. Рассмотрим скалярное произведение $\overline{\langle\xi|\hat{A}|\psi\rangle}=\overline{\langle\xi|\varphi\rangle}=\langle\varphi|\xi\rangle=\langle\hat{A}\psi|\xi\rangle$. С другой стороны, $\overline{\langle\xi|\hat{A}|\psi\rangle}\overset{(30)}{=}\langle\psi|\hat{A}^+|\xi\rangle\ \Rightarrow\ \langle\hat{A}\psi|\xi\rangle=\langle\psi|\hat{A}^+|\xi\rangle$, или $\langle\hat{A}\psi|=\langle\psi|\hat{A}^+$,

или $\left(\left|\hat{A}\psi\right\rangle\right)^{+} = \left\langle\psi\right|\hat{A}^{+}$. Доказано. Тогда, на основании (37) и (30), можно записать другое определение эрмитова сопряжения:

$$\left\langle\varphi\right|\hat{A}^{+}\left|\psi\right\rangle = \left\langle\hat{A}\varphi\middle|\psi\right\rangle. \qquad (38)$$

Для векторов $\left|\psi\right\rangle$, представленных функциями $\psi(x)$, можно записать определение эрмитова сопряжения (38) таким образом:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi^{*}(x)\hat{A}^{+}\psi(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\hat{A}\varphi(x)\right)^{*} \psi(x)\mathrm{d}x, \qquad (39)$$

или

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi^{*}(x)\hat{A}\psi(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\hat{A}^{+}\varphi(x)\right)^{*} \psi(x)\mathrm{d}x. \qquad (39')$$