3.3. Измерение

3.3.1. Проекционные операторы

Рассмотрим ортонормированную полную систему векторов состояний $|\psi_1\rangle \ldots |\psi_n\rangle$ в пространстве $\mathscr{L}_\mathrm{n}$. Любой вектор состояния такой системы, по (23), можно выразить в виде линейной комбинации этих векторов:

$$|\psi\rangle = c_1|\psi_1\rangle + \ldots + c_n|\psi_n\rangle, \text{ где } c_i = \langle\psi_i|\psi\rangle. \qquad (24)$$

При проведении эксперимента над квантовой системой реализуется один из возможных результатов измерения физической величины α_i с определённой вероятностью

$$p(\alpha_i, \psi) = \frac{|\langle\psi_i|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle} \overset{(24)}{=} \frac{c_i{}^2}{\|\psi\|^2}. \qquad (40)$$

При этом после измерения волновая функция $|\psi\rangle$ системы, представляющая суперпозицию состояний $|\psi_i\rangle$, переходит в состояние $|\psi_j\rangle$, соответствующее результату измерения физической величины α_j. Это явление называется _редукцией_ волновой функции и ***не выводится из других принципов квантовой механики***. Все остальные слагаемые в функции $|\psi\rangle$ исчезают в момент измерения.

Проекционный оператор $\hat{\mathrm{P}}_i$ формально позволяет выделить из $|\psi\rangle$ i -ю компоненту:

$$\hat{\mathrm{P}}_i|\psi\rangle = c_i|\psi_i\rangle, \qquad (41)$$

$$\hat{\mathrm{P}}_i|\psi\rangle \overset{(24)}{=} \langle\psi_i|\psi\rangle|\psi_i\rangle, \qquad (41')$$

а поскольку c_i – число, $\hat{\mathrm{P}}_i|\psi\rangle \overset{(41')}{=} |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\psi\rangle = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\cdot|\psi\rangle \Rightarrow$

$$\hat{\mathrm{P}}_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|. \qquad (42)$$

$\hat{\mathrm{P}}_i$ линеен и _идемпотентен_, $\hat{\mathrm{P}}_i{}^2 = \hat{\mathrm{P}}_i$, докажем последнее:

$$\hat{\mathrm{P}}_i{}^2|\psi\rangle = \hat{\mathrm{P}}_i\hat{\mathrm{P}}_i|\psi\rangle \overset{(41)}{=} \hat{\mathrm{P}}_i c_i|\psi_i\rangle \overset{(24),(41')}{=} \hat{\mathrm{P}}_i\langle\psi_i|\psi\rangle|\psi_i\rangle = \langle\psi_i|\psi\rangle\hat{\mathrm{P}}_i|\psi_i\rangle =$$
$$\overset{(42)}{=} \langle\psi_i|\psi\rangle|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\psi_i\rangle = \langle\psi_i|\psi\rangle|\psi_i\rangle \overset{(41)}{=} \hat{\mathrm{P}}_i|\psi\rangle.$$

Кроме того, $\hat{\mathrm{P}}_i$ – самосопряжённый оператор:

$$\hat{\mathrm{P}}_i{}^+ = \hat{\mathrm{P}}_i. \qquad (43)$$

Доказательство. В соответствии с (38) $\langle\varphi|\hat{\mathrm{A}}^+|\psi\rangle \overset{(38)}{=} \langle\hat{\mathrm{A}}\varphi|\psi\rangle$. Для самосопряжённого (эрмитова) оператора должно выполняться, т. к. $\hat{\mathrm{A}}^+ = \hat{\mathrm{A}}$,

$$\langle\varphi|\hat{\mathrm{A}}|\psi\rangle = \langle\hat{\mathrm{A}}\varphi|\psi\rangle. \qquad (44)$$

$$\langle\varphi|\hat{\mathrm{P}}_i|\psi\rangle \overset{(43)}{=} \langle\varphi|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\psi\rangle = \langle\overline{\langle\varphi|\psi_i\rangle}\psi_i|\psi\rangle = \langle\langle\psi_i|\varphi\rangle\psi_i|\psi\rangle \overset{(41')}{=} \langle\hat{\mathrm{P}}_i\varphi|\psi\rangle \Rightarrow$$

$$\langle\varphi|\hat{\mathrm{P}}_i|\psi\rangle = \langle\hat{\mathrm{P}}_i\varphi|\psi\rangle \qquad (45)$$

$\Rightarrow \hat{\mathrm{P}}_i^+ \overset{(44)}{=} \hat{\mathrm{P}}_i$. Использовалось свойство 2) скалярного произведения.

Сумма проекционных операторов

$$\hat{\mathrm{P}}_{(m)} = \sum_{i=1}^{m} \hat{\mathrm{P}}_i \overset{(42)}{=} \sum_{i=1}^{m} \left|\psi_i\right\rangle\left\langle\psi_i\right|, \quad 1 \le m \le n \tag{46}$$

проектирует на подпространство ортонормированных базисных векторов $\left|\psi_i\right\rangle, i = \overline{1,m}$. Действуя оператором $\hat{\mathrm{P}}_{(m)}$ на функцию $\left|\psi\right\rangle$, получаем ортогональную проекцию $\left|\psi\right\rangle$ на линейное подпространство $\mathscr{L}_{\mathrm{m}}$:

$$\hat{\mathrm{P}}_{(m)}\left|\psi\right\rangle \overset{(46)}{=} \sum_{i=1}^{m} \left|\psi_i\right\rangle\left\langle\psi_i\middle|\psi\right\rangle \overset{(24)}{=} \sum_{i=1}^{m} c_i\left|\psi_i\right\rangle, \quad 1 \le m \le n. \tag{47}$$

Из всей суммы векторов $\left|\psi\right\rangle = c_1\left|\psi_1\right\rangle + \ldots + c_n\left|\psi_n\right\rangle$ оператор проектирования выделяет только те, что лежат в подпространстве, на которое он проектирует. Можно построить оператор проектирования на всё пространство размерности n :

$$\hat{\mathrm{P}}_{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \left|\psi_i\right\rangle\left\langle\psi_i\right| \tag{48}$$

или на пространство бесконечной размерности, если $n = \infty$:

$$\hat{\mathrm{P}}_{(\infty)} = \sum_{i=1}^{\infty} \left|\psi_i\right\rangle\left\langle\psi_i\right|. \tag{48$'$}$$

Поскольку результат действия $\hat{\mathrm{P}}_{(n)}$ на $\left|\psi\right\rangle$ (проектирование на всё пространство) – снова вектор $\left|\psi\right\rangle$, согласно (48), (48′), то $\hat{\mathrm{P}}_{(n)} = \hat{1}$. (или $\hat{\mathrm{P}}_{(\infty)} = \hat{1}$ для $n = \infty$).