3.3.2. Наблюдаемые

Наблюдаемой в квантовой механике (по терминологии Дирака), называют любую физическую величину, которую можно измерить в эксперименте, причём результатами эксперимента являются действительные числа. Их называют *измеряемыми значениями наблюдаемой*.

Собственным состоянием квантовой системы называется состояние, для которого результаты эксперимента можно предсказать *с полной определённостью*.

Собственное состояние *невырождено*, если оно является единственным состоянием, для которого может наблюдаться данный результат эксперимента.

Собственные значения наблюдаемой – возможные результаты её измерений, каждое из них соответствует некоторому собственному состоянию или набору собственных состояний.

Из собственных значений и собственных состояний наблюдаемой для каждой наблюдаемой A строят соответствующий ей линейный оператор $\hat{A}$. Если для наблюдаемой A в эксперименте получаем значение a_i, то это значение соответствует действию оператора $\hat{A}$ на собственное состояние наблюдаемой:

$$\hat{A}\left|\psi_i\right\rangle = a_i\left|\psi_i\right\rangle. \tag{49}$$

Этим соотношением, напротив, можно определить понятие собственного значения и собственного оператора $\hat{A}$.

Оператор $\hat{A}$, описывающий наблюдаемую A, эрмитов. Это вытекает из вещественности его собственных значений.

Доказательство. Умножим (49) слева на эрмитово сопряжённый собственному вектору $\left|\psi_i\right\rangle$ оператора $\hat{A}$ из (49), $\left\langle\psi_i\right|$:

$$\left\langle\psi_i\right|\hat{A}\left|\psi_i\right\rangle \overset{(49)}{=} \left\langle\psi_i\right|a_i\psi_i\left.\right\rangle = a_i\left\langle\psi_i\middle|\psi_i\right\rangle = a_i\left\|\psi_i\right\|^2, \tag{50}$$

где $\left\|\psi_i\right\|$ – норма функции $\left|\psi_i\right\rangle$.

Выполним эрмитово сопряжение соотношения (49):

$$\left\langle\psi_i\right|\hat{A}^+ = \left(\hat{A}\left|\psi_i\right\rangle\right)^+ = \left(a_i\left|\psi_i\right\rangle\right)^+ = a^*{}_i\left\langle\psi_i\right|. \tag{51}$$

Умножим (51) справа на собственный вектор оператора $\hat{A}$, $\left|\psi_i\right\rangle$:

$$\left\langle\psi_i\right|\hat{A}^+\left|\psi_i\right\rangle \overset{(51)}{=} a^*{}_i\left\langle\psi_i\middle|\psi_i\right\rangle = a^*{}_i\left\|\psi_i\right\|^2.$$

Однако собственные значения оператора $\hat{A}$ по условию вещественны:

$$a^*{}_i = a_i. \tag{52}$$

Тогда

$$\left\langle\psi_i\right|\hat{A}^+\left|\psi_i\right\rangle \overset{(52)}{=} a_i\left\|\psi_i\right\|^2 \overset{(50)}{=} \left\langle\psi_i\right|\hat{A}\left|\psi_i\right\rangle. \tag{52}$$

Отсюда вытекает равенство

$$\hat{A}=\hat{A}^+.$$

Мы доказали, что из вещественности собственных значений оператора $\hat{A}$ вытекает эрмитовость оператора $\hat{A}$. Можно было бы, наоборот, доказать вещественность собственных значений оператора $\hat{A}$, исходя из его эрмитовости.

Для произвольного состояния системы $|\psi\rangle$,

$$|\psi\rangle = c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle + \ldots, \tag{53}$$

результат действия оператора $\hat{A}$ на $|\psi\rangle$ будет следующим:

$$\hat{A}|\psi\rangle = c_1 a_1|\psi_1\rangle + c_2 a_2|\psi_2\rangle + \ldots \tag{54}$$

Наблюдаемая $f(\mathrm{A})$, где $f(x)$ – любая функция вещественной переменной, имеет собственные значения $f(a)$, где a – собственные значения наблюдаемой А.

Наблюдаемые, являясь числами, всё же подчиняются другим правилам: так, результат умножения двух наблюдаемых А и В может зависеть от порядка, в котором они перемножаются, что соответствует возможной некоммутации операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$.

<u>Теорема</u> (без доказательства). Если эксперимент по измерению некоторой наблюдаемой А всегда даёт определённый результат, то

1) собственные векторы состояний, соответствующие разным результатам данного эксперимента, ортогональны друг другу;

2) собственные векторы эксперимента E образуют полную систему

$$\begin{cases} \langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij}, \quad i,j = 1,2,\ldots \\ |\psi\rangle = c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle + \ldots \end{cases} \tag{55}$$

(для дискретного спектра).

В случае непрерывно меняющихся значений наблюдаемой (непрерывный спектр собственных значений) формулы, аналогичные (55), выглядят несколько иначе.