3.3.3. Свойства наблюдаемых

Если квантовая система находилась до измерения в состоянии $|\psi\rangle$, то значение наблюдаемой A, полученное при измерении её в этом состоянии, является случайной величиной с законом распределения вероятностей, аналогичным (40):

$$P(a,\psi)=\sum_i \frac{\left|\langle\psi_i\,|\,\psi\rangle\right|^2}{\langle\psi\,|\,\psi\rangle}=\sum_i \frac{\left|c_i\right|^2}{\left\|\psi\right\|^2}\,. \qquad (56)$$

Предполагается, что наблюдаемая A принимает значение a более чем в одном состоянии; суммирование идёт по всем собственным состояниям, соответствующим собственным значениям a наблюдаемой A.

В этом случае говорят, что результат эксперимента <u>вырожден</u>.

$|\psi\rangle$ задаётся выражением вида (55). Множество всех векторов состояний $\mathcal{L}_a$, для которых эксперимент E даёт значение наблюдаемой A, равное a, называется <u>*собственным подпространством эксперимента*</u> E, соответствующим результату a; $|\psi_i\rangle$ – ортонормированная полная система векторов в пространстве $\mathcal{L}_a$.

Значение наблюдаемой, полученное при усреднении по большому числу измерений, произведённых над идентичными системами, находившимися до измерения в состоянии $|\psi\rangle$, называется <u>*ожидаемым*</u>, или <u>*средним значением*</u> наблюдаемой A и обозначается $\langle A\rangle$.

Стандартное отклонение, являющееся мерой разброса результатов измерения, называется <u>*неопределённостью*</u> наблюдаемой A и обозначается

$$\Delta A=\sqrt{\left\langle\left(A-\langle A\rangle\right)^2\right\rangle}\,. \qquad (57)$$

<u>Теорема</u>

Если вектор состояния $|\psi\rangle$ нормирован на единицу, то $\langle A\rangle$ и ΔA вычисляются по формулам:

$$\langle A\rangle=\langle\psi\,|\,\hat{A}\,|\,\psi\rangle\,, \qquad (58)$$

$$\left(\Delta A\right)^2=\langle\psi\,|\,\hat{A}^2\,|\,\psi\rangle-\langle\psi\,|\,\hat{A}\,|\,\psi\rangle^2\overset{(57)}{=}\langle\hat{A}^2\rangle-\langle\hat{A}\rangle^2\,. \qquad (59)$$

Докажем соотношение (59). Исходя из (57),

$$\left(\Delta A\right)^2=\left\langle\left(A\text{-}\langle A\rangle\right)^2\right\rangle=\left\langle\left(A^2-2\langle A\rangle A+\langle A\rangle^2\right)\right\rangle=\left\langle A^2\right\rangle-2\left\langle\langle A\rangle A\right\rangle+\left\langle\langle A\rangle^2\right\rangle.$$

Из (58) и того факта, что $\langle A\rangle$ – число, имеем:

$$\left(\Delta A\right)^2=\langle\psi\,|\,\hat{A}^2\,|\,\psi\rangle-2\langle\psi\,|\,\langle A\rangle\hat{A}\,|\,\psi\rangle+\langle\psi\,|\left(\langle\psi\,|\,\hat{A}\,|\,\psi\rangle^2\right)|\,\psi\rangle=\langle\psi\,|\,\hat{A}^2\,|\,\psi\rangle-$$

$$-2\langle A\rangle\langle\psi\,|\,\hat{A}\,|\,\psi\rangle+\left(\langle\psi\,|\,\hat{A}\,|\,\psi\rangle\right)^2\langle\psi\,|\,\psi\rangle=\langle\psi\,|\,\hat{A}^2\,|\,\psi\rangle-2\left(\langle\psi\,|\,\hat{A}\,|\,\psi\rangle\right)^2+$$

$$+\left(\langle\psi\,|\,\hat{A}\,|\,\psi\rangle\right)^2=\langle\psi\,|\,\hat{A}^2\,|\,\psi\rangle-\left(\langle\psi\,|\,\hat{A}\,|\,\psi\rangle\right)^2=\langle\hat{A}^2\rangle-\langle\hat{A}\rangle^2,\ \text{доказано.}$$

Поскольку процедура измерения влияет на состояние квантовой системы, порядок измерения наблюдаемых может оказаться существенным (в каждом опыте измеряют только одну наблюдаемую).

Две наблюдаемые называются *совместными*, если измерение одной из них не влияет на результат измерения другой. Т. е., если провести измерение величины A, затем B, и снова A, то второе измерение A даст в точности тот же результат, что и первое измерение A.

Теорема (без доказательства)

Наблюдаемые A и B совместны тогда и только тогда, когда операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ коммутируют друг с другом.

Утверждение теоремы эквивалентно утверждению, что существует полная система состояний $|\psi_i\rangle$, которые являются одновременно собственными состояниями и для $\hat{A}$, и для $\hat{B}$.

В том случае, если операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ не коммутируют, нужно рассмотреть их коммутатор $[\hat{A},\hat{B}]$. Если $\hat{A}$ и $\hat{B}$ эрмитовы, то их коммутатор, умноженный на мнимую единицу i, тоже эрмитов:

$$\left(i[\hat{A},\hat{B}]\right)^+ = i^*[\hat{A},\hat{B}]^+ = -i\left(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\right)^+ = -i\left(\hat{B}^+\hat{A}^+-\hat{A}^+\hat{B}^+\right) =$$

$$= i\left(\hat{A}^+\hat{B}^+-\hat{B}^+\hat{A}^+\right) = /\,\hat{A}=\hat{A}^+, \hat{B}=\hat{B}^+\,/ = i\left(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\right) = i[\hat{A},\hat{B}].$$

В таком случае $i[\hat{A},\hat{B}]$ можно рассматривать как оператор некоторой наблюдаемой, характеризующей степень несовместности наблюдаемых A и B.

Теорема (без доказательства)

Для любого состояния системы справедливо неравенство

$$\Delta A\,\Delta B \ge \frac{1}{2}\left|\left\langle i[\hat{A},\hat{B}]\right\rangle\right|, \qquad (60)$$

где $\Delta A, \Delta B$ определены выражением вида (59), а угловые скобки обозначают среднее от оператора по состоянию $|\psi\rangle$, см. (58).

В левой и правой части (60) – *c*-числа, так их называют, чтобы отличать от чисел-наблюдаемых.

Выражение (60) часто записывают в другой форме, возводя обе части в квадрат: $\Delta A^2\,\Delta B^2 \ge \frac{1}{4}\left|\left\langle i[\hat{A},\hat{B}]\right\rangle\right|^2$, модуль в правой части можно убрать, так как эрмитову оператору $i[\hat{A},\hat{B}]$ соответствуют вещественные значения наблюдаемой:

$$\Delta A^2\,\Delta B^2 \ge \frac{1}{4}\left\langle i[\hat{A},\hat{B}]\right\rangle^2. \qquad (60')$$

Пример соотношения $(60')$ для конкретных наблюдаемых.

Пусть наблюдаемые A и B представляют координату x и импульс p_x частицы, движущейся в пространстве, а операторы координаты $\hat{x}$ и импульса $\hat{p}_x$ есть, соответственно, умножение на число x и дифференцирование по координате x: $\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$. Тогда для наблюдаемых x и p_x, отвечающих некоммутирующим операторам $\hat{x}$ и $\hat{p}_x$ ($[r_i,\hat{p}_j] = -i\hbar\delta_{ij} \Rightarrow [x,\hat{p}_x] = -i\hbar$), справедливо соотношение неопределённостей Гейзенберга, играющее большую роль в квантовой механике:

$$\Delta x^2\,\Delta p_x^{\,2} \ge \frac{1}{4}\hbar^2. \qquad (61)$$

Правая часть (61), согласно $(60')$, обусловлена значением коммутатора $[x, \hat{p}_x]$:

$$\frac{1}{4}\left\langle i[x, \hat{p}_x]\right\rangle^2 = \frac{1}{4}\left\langle i i\hbar\right\rangle^2 = \frac{1}{4}\langle \psi \,|\, -\hbar \,|\, \psi\rangle^2 = \frac{1}{4}\hbar^2,$$

что приводит к (61).

Состояния, для которых в (60) (или $(60')$) выполняется нижняя граница нестрогого неравенства

$$\Delta \mathrm{A}^2 \, \Delta \mathrm{B}^2 \geq \frac{1}{4}\left\langle \hat{\mathrm{C}}\right\rangle^2, \quad \hat{\mathrm{C}} = i[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}] = \langle \psi \,|\, i[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}] \,|\, \psi\rangle^2, \qquad (62)$$

наиболее близки к классическому случаю и называются *когерентными*.