4.1. Эволюция квантовой системы

Уравнение, описывающее изменение состояние вектора системы со временем, является аналогом классических уравнений движения. Сделаем предположение, что эволюция состояния системы линейна, т. е., если

$$\left|\psi(t_0)\right\rangle = c_1\left|\psi_1\right\rangle + c_2\left|\psi_2\right\rangle + \ldots \tag{93}$$

в «нулевой» момент времени, то в момент времени t

$$\left|\psi(t)\right\rangle = c_1\left|\psi_1(t)\right\rangle + c_2\left|\psi_2(t)\right\rangle + \ldots, \tag{94}$$

т. е.

$$\left|\psi(t)\right\rangle = \hat{\mathrm{U}}(t,t_0)\left|\psi(t_0)\right\rangle, \tag{95}$$

где $\hat{\mathrm{U}}(t,t_0)$ – линейный оператор, называемый *оператором эволюции*.

4.1.1. Свойства оператора эволюции

1. Предполагаем, что норма функции $\left|\psi(t)\right\rangle$ (длина вектора состояния) со временем не меняется (меняется лишь направление вектора), т. е.

$$\left\langle\psi(t_0)\middle|\psi(t_0)\right\rangle = \left\langle\psi(t)\middle|\psi(t)\right\rangle = \left\langle\hat{\mathrm{U}}\psi(t_0)\middle|\hat{\mathrm{U}}\psi(t_0)\right\rangle = \left\langle\hat{\mathrm{U}}^{+}\hat{\mathrm{U}}\psi(t_0)\middle|\psi(t_0)\right\rangle \Rightarrow$$

$$\hat{\mathrm{U}}^{+}\hat{\mathrm{U}}=\hat{1}, \tag{96}$$

следовательно, оператор $\hat{\mathrm{U}}$ унитарный.

2. Абсолютное значение начального и конечного момента времени неважно, важен лишь временной интервал:

$$\hat{\mathrm{U}}(t,t_0) = \hat{\mathrm{U}}(t-t_0). \tag{97}$$

3. Для последовательной эволюции системы от момента времени t_0 до t_1, и от t_1 до t справедлив закон умножения:

$$\hat{\mathrm{U}}(t,t_1)\hat{\mathrm{U}}(t_1,t_0) = \hat{\mathrm{U}}(t,t_0). \tag{98}$$

Покажем это: пусть

$$\left|\psi(t)\right\rangle = \hat{\mathrm{U}}(t,t_1)\left|\psi(t_1)\right\rangle, \tag{a}$$

$$\left|\psi(t_1)\right\rangle = \hat{\mathrm{U}}(t_1,t_0)\left|\psi(t_0)\right\rangle, \tag{b}$$

$$\left|\psi(t)\right\rangle = \hat{\mathrm{U}}(t,t_0)\left|\psi(t_0)\right\rangle, \tag{c}$$

подставляя соотношение (b) в (a) и сравнивая с (c), получаем (98).

4. При совпадающих аргументах (времен*а*х) оператор эволюции равен единичному оператору, эволюции не происходит:

$$\left|\psi(t_0)\right\rangle = \hat{\mathrm{U}}(t_0,t_0)\left|\psi(t_0)\right\rangle \Rightarrow \hat{\mathrm{U}}(t_0,t_0) = \hat{\mathrm{U}}(0) = \hat{1}.$$

5. Из свойства 4 можно получить выражение для обратного к $\hat{\mathrm{U}}$ оператора. Если, из 3, $\hat{\mathrm{U}}(t,t_0)\hat{\mathrm{U}}(t_0,t) = \hat{\mathrm{U}}(t,t)$, то ввиду 4 это выражение равно единичному оператору, $\hat{\mathrm{U}}(t,t_0)\hat{\mathrm{U}}(t_0,t) = \hat{1}$.

Умножим это соотношение слева на $\hat{\mathrm{U}}^{-1}(t,t_0)$:

$\hat{\mathrm{U}}^{-1}(t,t_0)\cdot\hat{\mathrm{U}}(t,t_0)\hat{\mathrm{U}}(t_0,t) = \hat{\mathrm{U}}^{-1}(t,t_0)\cdot\hat{1}$, но по определению обратного оператора $\hat{\mathrm{U}}^{-1}(t,t_0)\hat{\mathrm{U}}(t,t_0) = \hat{1} \Rightarrow$

$$\hat{\mathrm{U}}(t_0,t) = \hat{\mathrm{U}}^{-1}(t,t_0), \tag{99}$$

обратный оператор «изменяет» направление времени.

6. Из свойств 5 и 1 можно найти выражение для $\hat{U}^{+}$. Для этого умножим (96) справа на $\hat{U}^{-1}(t,t_0)$:

$$\hat{U}^{+}(t,t_0)\hat{U}(t,t_0)\hat{U}^{-1}(t,t_0) = \hat{U}^{-1}(t,t_0) \Rightarrow \hat{U}^{+}(t,t_0) = \hat{U}^{-1}(t,t_0).$$

Но ввиду (99) $\hat{U}^{-1}(t,t_0) = \hat{U}(t_0,t)$, из чего следует

$$\hat{U}^{+}(t,t_0) = \hat{U}(t_0,t) = \hat{U}^{-1}(t,t_0). \tag{100}$$