4.2. Стационарные состояния

Состояние, в котором энергия имеет определённое значение E, называется <u>*стационарным*</u>.

В отсутствие переменных внешних полей оператор Гамильтона не содержит времени явно. В этом случае в уравнении Шрёдингера (103) решение $\psi(\vec{r},t)$ может быть представлено в виде произведения $\varphi(\vec{r})$ и $f(t)$:

$$i\hbar\frac{\partial f(t)}{\partial t}\varphi(\vec{r})=\left(\hat{\mathrm{H}}(\vec{r})\varphi(\vec{r})\right)f(t). \qquad (108)$$

Умножим и разделим на постоянную c уравнение (108), $c\cdot\frac{1}{c}=1$, и запишем вместо (108) два уравнения:

$$i\hbar\frac{df(t)}{dt}=c\,f(t), \qquad (109)$$

$$\hat{\mathrm{H}}(\vec{r})\varphi(\vec{r})=c\,\varphi(\vec{r}). \qquad (110)$$

Решаем уравнение (109): $\frac{df(t)}{f(t)}=-\frac{i}{\hbar}c\,dt \Rightarrow f(t)=C\,\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}ct}$.

Размерность постоянной Планка – энергия, умноженная на время. Для получения безразмерной величины в показателе экспоненты нужно, чтобы постоянная c имела размерность энергии, $[c]=[E]$. Таким образом,

$$f(t)=C\,\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}Et}.$$

При $t=t_0$ $f(t_0)=C\,\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}Et_0} \Rightarrow C=f(t_0)\,\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}Et_0} \Rightarrow$

$$f(t)=f(t_0)\,\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}E(t-t_0)}. \qquad (111)$$

Из (111) следует, что зависимость волновой функции <u>стационарного состояния</u> $\psi(\vec{r},t)$ от времени будет такой:

$$\psi(\vec{r},t)=\varphi(\vec{r})f(t)=\psi(\vec{r},t_0)\,\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}E(t-t_0)}, \qquad (112)$$

где $\psi(\vec{r},t_0)=\varphi(\vec{r})f(t_0)$.

Уравнение (110) принимает вид для стационарного состояния:

$$\hat{\mathrm{H}}(\vec{r})\varphi(\vec{r})=E\,\varphi(\vec{r}),$$

или,

$$\hat{\mathrm{H}}(\vec{r})\psi(\vec{r},t)=E\,\psi(\vec{r},t). \qquad (113)$$

Уравнение (113) называется <u>*уравнением Шрёдингера для стационарного состояния*</u>. Для дискретного спектра энергии выражения (112), (113) принимают вид:

$$\begin{cases}\hat{\mathrm{H}}(\vec{r})\psi_n(\vec{r},t)=E_n\,\psi_n(\vec{r},t),\\ \psi_n(\vec{r},t)=\psi_n(\vec{r},t_0)\,\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t-t_0)}.\end{cases} \qquad (114)$$

Стационарное состояние с наименьшим возможным значением энергии называется <u>*основным состоянием*</u>.

Можно принять t_0 равным нулю, тогда последняя формула будет выглядеть проще

$$\psi_n(\vec{r},t) = \psi_n(\vec{r},0)\,\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}. \qquad (115)$$

Легко показать, что средние значения (58) (п.3.3.3) для любых физических величин в стационарном состоянии не зависят от времени:

$$\langle \mathrm{A} \rangle = \left\langle \psi_n(t) \middle| \hat{\mathrm{A}} \middle| \psi_n(t) \right\rangle \overset{(115)}{=} \left\langle \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} \psi_n(0) \middle| \hat{\mathrm{A}} \middle| \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} \psi_n(0) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}E_n t} \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} \psi_n(0) \middle| \hat{\mathrm{A}} \middle| \psi_n(0) \right\rangle = \left\langle \psi_n(0) \middle| \hat{\mathrm{A}} \middle| \psi_n(0) \right\rangle.$$

Предположим, что гамильтониан $\hat{\mathrm{H}}$ имеет полную систему собственных функций $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \ldots$, соответствующих значениям энергии $|E_1\rangle, |E_2\rangle, \ldots$ Тогда произвольное состояние $\psi(t)$ можно разложить в ряд по данной полной системе с постоянными коэффициентами:

$$\psi(t) = \sum_m c_m \psi_m(t) \overset{(115)}{=} \sum_m c_m \,\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}E_m t} \psi_m(0). \qquad (116)$$

Квадраты коэффициентов c_m в разложении (116) определяют, как обычно, вероятности различных значений энергии системы.

Среди различных стационарных состояний могут существовать такие, которые соответствуют одному и тому же собственному значению энергии (энергетическому уровню системы). Энергетические уровни системы, которым соответствует несколько различных собственных состояний, называются *выроженными*.