## 4.3. Изменение средних значений физической величины со временем

В стационарных состояниях средние не зависят от времени, но в произвольном состоянии $\psi(\vec{r},t)$ это не так.

Найдём $\dfrac{d}{dt}\langle \mathrm{A} \rangle$; $\langle \mathrm{A} \rangle = \left\langle \psi(\vec{r},t) \middle| \hat{\mathrm{A}} \middle| \psi(\vec{r},t) \right\rangle$.

Поскольку оператор $\hat{\mathrm{A}}$ не зависит от времени, то

$$i\hbar \frac{d}{dt}\langle \mathrm{A} \rangle = i\hbar \left\langle \frac{d}{dt}\psi(\vec{r},t) \middle| \hat{\mathrm{A}}\psi(\vec{r},t) \right\rangle + i\hbar \left\langle \psi(\vec{r},t) \middle| \hat{\mathrm{A}}\frac{d}{dt}\psi(\vec{r},t) \right\rangle.$$

Используем в этом равенстве уравнение Шрёдингера (103), $i\hbar \dfrac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{\mathrm{H}}|\psi(t)\rangle$, и сопряжённое к нему $-i\hbar \dfrac{\partial \langle \psi(t)|}{\partial t} = \langle \psi(t)|\hat{\mathrm{H}}$, так как $\left(\hat{\mathrm{H}}|\psi(t)\rangle\right)^{+} = \langle \psi(t)|\hat{\mathrm{H}}^{+} = \langle \psi(t)|\hat{\mathrm{H}}$.

Тогда

$$i\hbar \frac{d}{dt}\langle \mathrm{A} \rangle = -\langle \psi|\hat{\mathrm{H}}\hat{\mathrm{A}}|\psi\rangle + \langle \psi|\hat{\mathrm{A}}\hat{\mathrm{H}}|\psi\rangle = \langle \psi|\hat{\mathrm{A}}\hat{\mathrm{H}} - \hat{\mathrm{H}}\hat{\mathrm{A}}|\psi\rangle = \langle \psi|\left[\hat{\mathrm{A}},\hat{\mathrm{H}}\right]_{-}|\psi\rangle \Rightarrow$$

$$i\hbar \frac{d}{dt}\langle \mathrm{A} \rangle = \langle \psi|\left[\hat{\mathrm{A}},\hat{\mathrm{H}}\right]_{-}|\psi\rangle, \tag{117}$$

или

$$\frac{d}{dt}\langle \mathrm{A} \rangle = -\frac{i}{\hbar}\langle \psi|\left[\hat{\mathrm{A}},\hat{\mathrm{H}}\right]_{-}|\psi\rangle. \tag{117$'$}$$

Отметим, что в шрёдингеровском описании квантовой механики информацию об эволюции квантовой системы во времени несёт волновая функция, операторы же обычно не содержат явной зависимости от времени.

Существует другой способ представления – Гейзенберга, в котором зависимость от времени переносится на операторы, а волновые функции не зависят от времени. Представления Шрёдингера и Гейзенберга легко связать, используя выражения для среднего значения оператора $\hat{\mathrm{A}}$, которое не зависит от типа представления.