## 4.4. Представление Гейзенберга

Запишем выражение для среднего значения оператора $\hat{A}$:

$\langle A\rangle^t = \langle \psi_ш(t)|\hat{A}_ш|\psi_ш(t)\rangle$.

Значок $^t$ вверху подчёркивает, что среднее значение зависит от времени. Нижний индекс $_ш$ у функции и оператора указывает, что функции и операторы рассматриваются в шрёдингеровском представлении.

$$\langle \psi_ш(t)|\hat{A}_ш|\psi_ш(t)\rangle \overset{(95)}{=} \langle \hat{U}\psi(0)|\hat{A}_ш|\hat{U}\psi(0)\rangle = \langle \hat{U}^{++}\psi(0)|\hat{A}_ш|\hat{U}\psi(0)\rangle =$$

$$= \langle \psi(0)|\hat{U}^{+}\hat{A}_ш\hat{U}|\psi(0)\rangle = \langle \psi(0)|\hat{A}_Г(t)|\psi(0)\rangle \Rightarrow$$

$$\hat{U}^{+}\hat{A}_ш\hat{U} = \hat{A}_Г(t). \qquad (118)$$

При выводе (118) использовалось соотношение $\hat{A}^{++} = \hat{A}$ для произвольного оператора (конкретно $\hat{U}^{++} = \hat{U}$), вытекающее из (30).

Значок $_Г$ указывает на представление Гейзенберга. Функция при нулевом времени $|\psi(0)\rangle$ значка $_ш$ не имеет, поскольку совпадает с функцией в гейзенберговском представлении, т. е. это гейзенберговская функция, но значок $_Г$ для простоты не ставим. Обратим внимание, что средние значения физической величины в шрёдингеровском и гейзенберговском представлении совпадают.

Оператор в гейзенберговском представлении определяется выражением (118), он зависит от времени. Состояние квантовой системы при этом в картине Гейзенберга от времени не зависит.

В начальный момент времени волновые функции и операторы в картинах Гейзенберга и Шрёдингера совпадают:

$$\hat{A}_Г(0) = \hat{A}_ш, \ \ \psi_Г = \psi_ш(0). \qquad (119)$$

Получим формулу для изменения гейзенберговского оператора во времени, дифференцируя (118) по $t$:

$$i\frac{d}{dt}\hat{A}_Г(t) = i\,\frac{d\,\hat{U}^{+}}{dt}\hat{A}_ш\hat{U} + i\,\hat{U}^{+}\hat{A}_ш\frac{d\,\hat{U}}{dt} + i\,\hat{U}^{+}\frac{d\,\hat{A}_ш}{dt}\hat{U}.$$

Используем уравнение (102) $i\dfrac{d\,\hat{U}(t,t_0)}{d\,t}\hat{U}^{+}(t,t_0) = \dfrac{\hat{H}}{\hbar}$ для вычисления производной от оператора эволюции и сопряжённого ему. Умножим обе части (102) справа на $\hat{U}$ и учтём свойство унитарности (96) оператора $\hat{U}$:

$$i\hbar\frac{d\,\hat{U}}{d\,t} = \hat{H}\hat{U}. \qquad (120)$$

Возьмём эрмитово сопряжение уравнения (120), получим:

$$-i\hbar\frac{d\,\hat{U}^{+}}{d\,t} = \hat{U}^{+}\hat{H}. \qquad (120')$$

Мы учли в последнем уравнении самосопряжённость оператора Гамильтона.

Производная оператора в представлении Гейзенберга примет вид:

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{A}_Г(t) = -\hat{U}^{+}\hat{H}\,\hat{A}_ш\hat{U} + \hat{U}^{+}\hat{A}_ш\hat{H}\hat{U} + i\hbar\,\hat{U}^{+}\frac{\partial\,\hat{A}_ш}{\partial t}\hat{U}.$$

Поместим между $\hat{H}$ и $\hat{A}_ш$ в первом и втором слагаемых «единицу» $\hat{1} = \hat{U}\hat{U}^{+} \Rightarrow$

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{\mathrm{A}}_{\Gamma}(t)=-\left(\hat{\mathrm{U}}^{+}\hat{\mathrm{H}}\,\hat{\mathrm{U}}\right)\left(\hat{\mathrm{U}}^{+}\hat{\mathrm{A}}_{ш}\hat{\mathrm{U}}\right)+\left(\hat{\mathrm{U}}^{+}\hat{\mathrm{A}}_{ш}\hat{\mathrm{U}}\right)\left(\hat{\mathrm{U}}^{+}\hat{\mathrm{H}}\hat{\mathrm{U}}\right)+i\hbar\,\hat{\mathrm{U}}^{+}\frac{\partial\hat{\mathrm{A}}_{ш}}{\partial t}\hat{\mathrm{U}}\overset{(118)}{=}$$

$$=-\hat{\mathrm{H}}_{\Gamma}\hat{\mathrm{A}}_{\Gamma}+\hat{\mathrm{A}}_{\Gamma}\hat{\mathrm{H}}_{\Gamma}+i\hbar\frac{\partial\hat{\mathrm{A}}_{\Gamma}}{\partial t}\Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathrm{A}}_{\Gamma}(t)=\frac{\partial\hat{\mathrm{A}}_{\Gamma}}{\partial t}+\frac{1}{i\hbar}\left[\hat{\mathrm{A}}_{\Gamma},\hat{\mathrm{H}}_{\Gamma}\right]_{-}. \qquad (121)$$

(121) представляет собой гейзенберговское уравнение движения – уравнение движения для операторов в представлении Гейзенберга. Оно является аналогом уравнения Шрёдингера для волновой функции состояния.

Используем уравнение (121) для определения интегралов движения – величин, не зависящих от времени.