4.5. Интегралы движения

В отличие от классических интегралов движения в квантовой механике интеграл движения возникает, если в любом состоянии системы

$$\frac{d}{dt}\langle \mathrm{A}\rangle = 0: \tag{122}$$

$$\frac{d\langle \mathrm{A}\rangle}{dt} = \frac{d}{dt}\langle \psi_{ш}(t)|\hat{\mathrm{A}}_{ш}(t)|\psi_{ш}(t)\rangle \overset{(118)}{=} \frac{d}{dt}\langle \psi_{Г}(0)|\hat{\mathrm{A}}_{Г}(t)|\psi_{Г}(0)\rangle =$$

$$= \langle \psi_{Г}(0)|\frac{d}{dt}\hat{\mathrm{A}}_{Г}(t)|\psi_{Г}(0)\rangle \overset{(121)}{=}$$

$$= \langle \psi_{Г}(0)|\left\{\left(\frac{\partial \hat{\mathrm{A}}(t)}{\partial t}\right)_{Г} + \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{\mathrm{A}}_{Г}(t), \hat{\mathrm{H}}_{Г}(t)\right]_{-}\right\}|\psi_{Г}(0)\rangle.$$

Предположим, что оператор $\hat{\mathrm{A}}$ не зависит от t явно. Тогда условие (122) выполняется, если $\langle \psi|\left[\hat{\mathrm{A}}_{Г}, \hat{\mathrm{H}}_{Г}\right]|\psi\rangle = 0$.

Заметим, что в этом случае

$$\frac{d}{dt}\langle \mathrm{A}\rangle = \langle \psi_{Г}(0)|\left(\frac{\partial \hat{\mathrm{A}}(t)}{\partial t}\right)_{Г}|\psi_{Г}(0)\rangle = \left\langle \frac{d}{dt}\mathrm{A}\right\rangle. \tag{122′}$$

Перейдём обратно к шрёдингеровскому представлению. Из (118) следует:

$$\langle \psi(0)|\left(\hat{\mathrm{U}}^{+}\hat{\mathrm{A}}_{ш}\hat{\mathrm{U}}\hat{\mathrm{U}}^{+}\hat{\mathrm{H}}_{ш}\hat{\mathrm{U}} - \hat{\mathrm{U}}^{+}\hat{\mathrm{H}}_{ш}\hat{\mathrm{U}}\hat{\mathrm{U}}^{+}\hat{\mathrm{A}}_{ш}\hat{\mathrm{U}}\right)|\psi(0)\rangle =$$

$$= \langle \psi(0)|\hat{\mathrm{U}}^{+}\left(\hat{\mathrm{A}}_{ш}\hat{\mathrm{H}}_{ш} - \hat{\mathrm{H}}_{ш}\hat{\mathrm{A}}_{ш}\right)\hat{\mathrm{U}}|\psi(0)\rangle =$$

$$= \langle \hat{\mathrm{U}}\psi(0)|\left[\hat{\mathrm{A}}_{ш}, \hat{\mathrm{H}}_{ш}\right]_{-}|\hat{\mathrm{U}}\psi(0)\rangle = \langle \psi(t)|\left[\hat{\mathrm{A}}_{ш}, \hat{\mathrm{H}}_{ш}\right]_{-}|\psi(t)\rangle,$$

при использовании условия $\hat{\mathrm{U}}\hat{\mathrm{U}}^{+} = \hat{1}$, соотношения (95) и сопряжённого к нему.

Таким образом, если оператор $\hat{\mathrm{A}}$ не зависит от t явно и $\left[\hat{\mathrm{A}}_{ш}, \hat{\mathrm{H}}_{ш}\right]_{-} = 0$, то $\frac{d}{dt}\langle \mathrm{A}\rangle = 0$, A есть интеграл движения.

<u>Простой пример</u>: если в качестве оператора $\hat{\mathrm{A}}$ возьмём $\hat{\mathrm{H}}$, то, конечно, $\left[\hat{\mathrm{H}}, \hat{\mathrm{H}}\right]_{-} = 0$. Следовательно, в системах с гамильтонианом, явно не зависящим от времени, энергия сохраняется (как в классике).

Пусть теперь $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\vec{\mathrm{p}}}$: $\left[\hat{\vec{\mathrm{p}}}, \hat{\mathrm{H}}\right] = 0$, если потенциальная энергия U не зависит от $\vec{r}$ явно в гамильтониане $\hat{\mathrm{H}}$: $\hat{\mathrm{H}} = \frac{\hat{\vec{\mathrm{p}}}^{2}}{2m} + U$, где $U = \mathrm{const}$. Таким образом, импульс сохраняется в постоянном внешнем поле, а в переменном – нет.